Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem
Marosvásárhelyi Kar

EMTER verseny
2018. március 24.
Matematika tétel

Hivatalból 10 pont jár. Munkaidő 3 óra.

I. Tétel (30 pont)

1. (6 pont) Számítsuk ki $\widehat{3}^{2018}$-t $\mathbb{Z}_7$-ben.
2. (6 pont) Egy cukrászdában 4 féle süteményből lehet választani. Hány különböző képpen tudunk 3 süteményt kiválasztani?
3. (6 pont) Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$.
4. (6 pont) Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:
$$\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 14, \\ x^2 + y^2 + xy = 84. \end{cases}$$
5. (6 pont) Határozzuk meg az $a \in \mathbb{R}$ értékeit amelyre az $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + a \ln x$, függvény teljesíti az $f'(1) = 1$ összefüggést!

II. Tétel (30 pont)

1. (7 pont) Legyen $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Határozzuk meg $x, y \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy teljesüljön az
$$A^2 + xA + yI_2 = O_2$$
összefüggés, ahol I_2 illetve O_2 a másodrendű egységmátrix, illetve zérusmátrix.
2. (8 pont) Legyen $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Igazoljuk, hogy ha létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ amelyre $A^k = O_2$, akkor $A^2 = O_2$.
3. (7 pont) Legyenek $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Bizonyítsuk be, hogy
$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA),$$
ahol tr a mátrix nyomát jelöli.
4. (8 pont) Legyenek $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, úgy, hogy $(A \cdot B)^2 = O_2$, ahol O_2 a zérusmátrix. Igazoljuk, hogy $(B \cdot A)^2 = O_2$.

emter

III. Tétel (30 pont)

1. (10 pont)

   (a) (5 pont) Bizonyítsuk be, hogy

   $$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx,\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

   (b) (5 pont) Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán :

   $$4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x.$$

2. (20 pont) Adottak az $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   $$f_n(x) = \operatorname{arctg}(x) - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} \right),$$

   $$g_n(x) = f_n(x) + \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$$

   függvények.

   (a) (2 pont) Számítsuk ki $f_n(0)$ és $g_n(0)$ értékeket.

   (b) (3 pont) Igazoljuk, hogy

   $$f_n'(x) = \frac{-x^{4n-2}}{1+x^2},\quad g_n'(x) = \frac{x^{4n}}{1+x^2}.$$

   (c) (5 pont) Bizonyítsuk be, hogy $f_n(x) < 0 < g_n(x)$, minden $x > 0$ és $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

   (d) (5 pont) Bizonyítsuk be, hogy

   $$\lim_{n\to\infty} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} \right) = \operatorname{arctg}(x),\ \forall x \in [-1, 1].$$

   (e) (5 pont) Bizonyítsuk be, hogy

   $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} - ... + \frac{1}{(4n-3)\cdot(4n-2)} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$