Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem
Marosvásárhelyi Kar

Matematika tétel

2019. április 6.

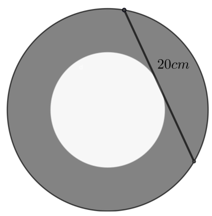
- **Minden tétel kötelező. Hivatalból 10 pont szerezhető. Munkaidő 3 óra.**

1. (**10 pont**) Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\left(2+\sqrt{2}\right)^x + \left(2-\sqrt{2}\right)^x = 2^{-x}.$$

2. (**10 pont**) Igazoljuk, hogy minden $n \geq 2$ természetes szám esetén $2^{2^n} - 6$ szám osztható 10-el.

3. (**10 pont**) Egy kalap karimájának a tanulmányozásához az alábbi ábrán lévő mérést végeztük.



Mekkora a karima (sötét rész) területe ha $l = 20\text{cm}$?

4. (**10 pont**) Igazoljuk, hogy $\log_2 3 > \log_3 4$ és $\log_2 3$ irracionális szám!

5. (**20 pont**)

a) Igazoljuk, hogy minden $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix esetén

$$A^2 - \mathrm{Tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2.$$

b) Legyen $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ úgy, hogy $\det\left(A^2 - 3I_2\right) = 0$, akkor igazoljuk, hogy

$$\det(A) = -3 \text{ és } A^2 - 3I_2 = O_2.$$

6. (**10 pont**)

a) Igazoljuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\arctan(x+1) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right).$$

b) Számítsuk ki a következő határértéket:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\arctan\frac{1}{1+1+1^2} + \arctan\frac{1}{1+2+2^2} + \ldots + \arctan\frac{1}{1+n+n^2}\right).$$

7. (**20 pont**) Legyen $\mathcal{F} = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ folytonos, } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \right\}$.

a) Adjunk példát $f \in \mathcal{F}$-re!

b) Igazoljuk, hogy minden $f \in \mathcal{F}$ esetén igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\left(\int_a^b t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_a^b t^2 \cdot f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Mikor áll fenn az egyenlőség?