

Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem

EMTER verseny 2025 - Matematika tétel

- Minden tétel kötelező;
- Hivatalból 10 pont szerezhető;
- Munkaidő 3 óra;

I. Rész (30 pont)

1. Helyezd növekvő sorrendbe a következő számokat: $3!$, $\sqrt[3]{100}$, $\log_2 40$.

2. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = 1.$$

3. Igazold, hogy $x^2 + 3xy + 4y^2 \geq 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

4. Milyen $a \in \mathbb{R}$ értékekre zárnak az $\vec{u} = 2\vec{i} - a\vec{j}$ és $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ vektorok tompa szöget?

5. Határozd meg azokat az $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ természetes számokat, amelyekre C_n^3 osztja a C_{n+1}^3 értéket!

6. Számítsd ki $\tan 2\theta$ értéket ha $\sin \theta + \cos \theta = 1$.

II. Rész (30 pont)

1. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Igazold, hogy $A^2 = 3A$.

(b) Számítsd ki a $\det(I_3 + A^3)$ értékét!

(c) Igazold, hogy ha $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, úgy, hogy $AB = BA$, akkor a B mátrix minden oszlopán, illetve során a tagok összege azonos.

2. Adott az $x^3 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$ egyenlet, aminek komplex gyökei x_1, x_2, x_3 .

(a) Számítsd ki az x_1, x_2, x_3 gyököket ha $p = 1$, $q = 0$.

(b) Számítsd ki a p és q értékeket ha $x_1 = 1 + i$.

(c) Számítsd ki az $\frac{x_1 x_2}{x_3} + \frac{x_2 x_3}{x_1} + \frac{x_3 x_1}{x_2}$ összeget!

III. Rész (30 pont)

1. (a) Igazold, hogy $(\forall) k \in \mathbb{N}^*$

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

- (b) Az (a) pont felhasználásával igazold, hogy

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{n+1} - 1).$$

- (c) Számítsd ki a határértéket:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a^x-1}{x} & \text{ha } x > 0 \\ bx+1 & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

függvény, ahol $a, b \in (0, +\infty)$.

- (a) Határozd meg az $a \in \mathbb{R}$ paramétert úgy, hogy az f függvény folytonos legyen!
(b) Határozd meg a $b \in \mathbb{R}$ paramétert úgy, hogy az f függvény deriválható legyen!
(c) Számítsd ki az

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

integrált az előbbi alpontokban kiszámolt paraméterek esetén.