



# emter verseny 2026 - Matematika tétel

A tételeket részletesen ki kell dolgozni. Hivatalból 10 pont jár. Munkaidő 3 óra.

## I. Rész (30 pont)

1. Helyezd növekvő sorrendbe a következő számokat:  $C_5^2$ ,  $\log_2 \log_2 1024$ ,  $2 \sin \frac{\pi}{8}$
2. Számítsd ki a  $z = (1 + 2i)^2 + \frac{2}{1-i}$  komplex szám modulusát!
3. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy a kétjegyű természetes számok halmazából kiválasztva egy számot, annak a számjegyeinek a szorzata 16 legyen!
4. Az  $xOy$  derékszögű koordináta-rendszerben adottak az  $A(0, 1)$ ,  $B(2, 5)$ ,  $C(6, 1)$  pontok. Határozd meg a  $D$  pont koordinátáit, ha tudjuk, hogy  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC}$ .
5. Számítsd ki  $a + b + c$  értéket ha  $a, b, c \in \mathbb{R}$  és  $ab = 10$ ,  $bc = 20$ ,  $ca = 30$ .
6. Oldd meg az egyenletet:  $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ .

## II. Rész (30 pont)

1. Adottak az  $A(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  mátrixok.
  - (a) Számítsd ki a  $\det(A(1))$  értékét!
  - (b) Igazold, hogy  $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .
  - (c) Határozd meg a  $B = A(1) \cdot A(2) \cdot A(3) - I_3$  mátrix rangját ( $I_3$  az egység mátrix).
2. Az  $M = (0, \infty)$  halmazon értelmezzük az  $x * y = \frac{xy}{x+y}$  asszociatív műveletet.
  - (a) Számítsd ki a  $2 * \frac{1}{2}$  értéket!
  - (b) Bizonyítsd be, hogy  $x * y * z = (x^{-1} + y^{-1} + z^{-1})^{-1}$ ,  $\forall x, y, z \in M$ .
  - (c) Számítsd ki az  $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{10}$  értéket!

### III. Rész (30 pont)

Adott az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$  függvény.

1. Számítsd ki az  $f$  deriváltját!
2. Add meg az  $A(0, 1)$  ponton áthaladó, az  $f$  függvény grafikonjához húzott érintő egyenletét!
3. Tanulmányozd az  $f$  aszimptotáit!
4. Határozd meg az  $f$  szélsőértékét!
5. Határozd meg az  $m \in \mathbb{R}$  értékeit úgy, hogy az  $f(x) = m$  egyenletnek két különböző megoldása legyen!
6. Számítsd ki az  $\int_0^1 f(x)dx$  integrál értékét!