Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem
EMTER verseny
Matematika tétel
2015. március 28.

- **Minden tétel kötelező;**
- **Hivatlaból 10 pont szerezhető;**
- **Munkaidő 3 óra;**

I. Rész (30 pont)

1. Határozzuk meg az összes olyan $x, y \in \mathbb{R}$ valós számot, amelyre

$$5x^2 + 10y^2 - 12xy - 6x - 4y + 13 \leq 0.$$

2. Határozzuk meg az $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x$ függvény értékeinek a halmazát.

3. Hány racionális tagja van a $(2 + \sqrt{3})^{100}$ kifejezés binomiális kifejtésének?

4. Határozzuk meg az A(5,6) pont $\mathbf{d}_1 : 2x - y - 2 = 0$ egyenesre eső vetületét.

5. Oldjuk meg a $\log_3^2(2x-1)^2 - 3\log_3(2x-1) - 1 = 0$ egyenletet.

6. Az ABC háromszög területe $\sqrt{48}$ cm^2 . Igazoljuk, hogy a háromszög kerülete legalább 12 cm.

II. Rész (30 pont)

1. Adott a következő mátrixhalmaz

$$\mathbb{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Van-e olyan A mátrix az $\mathbb{M}$ halmazban, amely esetén $\det(A) = 1$?

b) Igaz-e, hogy az $\mathbb{M}$ halmaz minden invertálható elemének az inverze is $\mathbb{M}$-hez tartozik?

c) Igazoljuk, hogy az $(\mathbb{M}+, \cdot)$ kommutatív test, amely izomorf a $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ komplex számok kommutatív testével.

d) Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrix n-edik hatványát.

e) Oldjuk meg

$$\mathbf{X^4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

egyenletet.

III. Rész (30 pont)

1. Az $(I_n)_{n\geq 1}$ sorozatot az $I_n = \int_0^1 (x - x^2)^n \sin(\pi x) dx$ képlettel értelmezzük.

a) Igazoljuk, hogy az $(I_n)_{n\geq 1}$ sorozat csökkenő.

b) Számítsuk ki I_1-et.

c) Igazoljuk, hogy

$$I_n = 2\int_0^{\frac{1}{2}} (x - x^2)^n \sin(\pi x) dx.$$

d) Igazoljuk, hogy

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (x - x^2)^n \sin(\pi x) dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{u^n}{\sqrt{1-4u}} \sin\left(\pi \frac{1 - \sqrt{1-4u}}{2}\right) du.$$

e) Felhasználva a c) és d) pontokat bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n\to\infty} 4^n I_n = 0$.

1. Megoldások

I. Rész

1. Rendezzük az egyenlőtlenséget x hatványai szerint.

$$5x^2 - 6x(2y+1) + 10y^2 - 4y + 13 \leq 0.$$

Ekkor

$$\Delta = 144y^2 + 144y + 36 - 200y^2 + 80y - 260 = -56(y-2)^2$$

Tehát csak akkor van olyan x, amely teljesíti az egyenlőtlenséget, ha

$$\Delta = -56(y-2)^2 \geq 0.$$

Ebből az következik, hogy $y = 2$ és $x = 3$.

2. Az f függvény szigorúan csökkenő a $[-1, 2]$ intervallumon és szigorúan növekvő a $[2, 4]$ intervallumon.

$$\min_{x\in[-1,4]} f(x) = f(2) = -4 \quad \text{és} \quad \max_{x\in[-1,4]} f(x) = \max\{f(-1), f(4)\} = 5.$$

Ami pontosan azt jelenti, hogy $\mathrm{Im}(f) = [-4, 5]$.

3. Felhasználva a kifejtés áltaknáso tagjára ismert képletet:

$$T_{k+1} = C_{100}^k 2^{100-k} 3^{\frac{100-k}{2}} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{100-k}{2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2|k \Leftrightarrow k = 2l \Leftrightarrow$$

$k \in \{0, 2, 4, \ldots, 100\}$. Thehát 51 racionális tag van.

4. Jelölje az A vetületét d_1-re B. Az $m_{d_1} m_{d_2} = -1$ merőlegességi feltételből az következik, hogy az A ponton áthaladó, d_1-re merőleges egyenes iránytényezője $m_{d_2} = -\frac{1}{2}$. Az A ponton áthaladó, d_1-re merőleges egyenes egyenlete

$$y - 6 = -\frac{1}{2}(x-5).$$

Mivel $d_1 \cap d_2 = \{B\}$, következik, hogy a a vetület koordinátái az

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases}$$

egyenlet megoldásai az az $B(\frac{11}{2}, 9)$.

5. Az egyenlet értelmezési tartománya $D = (\frac{1}{2}, \infty)$. Bevezetjük a $t = \log_3(2x-1)$ jelölést. A jelölést használva az egyenlet a következő alakba írható:

$$4t^2 - 3t - 1 = 0,$$

melynek a gyökei $t_1 = 1,\ t_2 = \frac{1}{4}$. Következik, hogy

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{1 + 3^{\frac{1}{4}}}{2}.$$

6. A Héron képletéből következik, hogy

$$(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{48}{p}.$$

A számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján

$$\Big(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\Big)^3 \geq (p-a)(p-b)(p-c) = \frac{48}{p} \Leftrightarrow$$

$$\frac{p^4}{3^3} \geq 48 \Leftrightarrow p \geq 6 \Leftrightarrow a + b + c \geq 12.$$

II. Rész

1. a) Világos, hogy a következő mátrix teljesíti a kért feltételeket:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b) Ha az $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ akkor direkt számolás útján világos, hogy $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$. Ami pontosan azt jelenti, hogy $A^{-1} \in \mathbb{M}$.
c) Egyszerű ellenőrizni, hogy $f : \mathbb{C} \to \mathbb{M}$,

$$f(x+iy) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \in \mathbb{M},$$

egy olyan függvény, amely bijektív és teljesíti a morfizmus feltételeit:

$$f(z_1+z_2) = f(z_1) + f(z_2), \quad (\forall) z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

$$f(z_1 z_2) = f(z_1) f(z_2), \quad (\forall) z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

d) Az f függvény értelmezése alapján

$$f(3+2i) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Mivel f izomorfizmus következik, hogy

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^n = f((3+2i)^n) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(3+2i)^n & \operatorname{Im}(3+2i)^n \\ -\operatorname{Im}(3+2i)^n & \operatorname{Re}(3+2i)^n \end{pmatrix}.$$

e) A mátrixegyenletet szintén az izomorfizmus segítségével oldjuk meg. Legyen

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

Az egyenletet megszorozzuk jobbról és balról $X-$el és azt kapjuk, hogy

$$X^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Innen egyszerűen következik, hogy $x = t, z = -y$, azaz

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

Innen az következik, hogy $X \in \mathbb{M}$ és így az

$$X^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

egynlet mindkét oldalán álló mátrix az $\mathbb{M}$ osztályhoz tartozik. Legyen $f(z) = X$.

$$X^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow z^4 = f^{-1}\Big(X^4\Big) = f^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1+i.$$

A $z^4 = 1+i$ egyenlet megoldásai

$$z_k = 2^{\frac{1}{8}}\Big(\cos\frac{\pi + 8k\pi}{16} + i\sin\frac{\pi+8k\pi}{16}\Big), \quad k = \overline{0,3}.$$

Thehát a mátrixegyenlet megoldásai

$$X_k = \begin{pmatrix} 2^{\frac{1}{8}}\cos\frac{\pi+8k\pi}{16} & 2^{\frac{1}{8}}\sin\frac{\pi+8k\pi}{16} \\ -2^{\frac{1}{8}}\sin\frac{\pi+8k\pi}{16} & 2^{\frac{1}{8}}\cos\frac{\pi+8k\pi}{16} \end{pmatrix}, \quad k = \overline{0,3}.$$

III Rész

1.a) Világos a következő egyenlőtlenség: $(x-x^2)^{n+1} \le (x-x^2)^n, \; (\forall) x \in [0,1]$ azaz

$$(x-x^2)^{n+1}\sin(\pi x) \le (x-x^2)^n \sin(\pi x), \; (\forall) x \in [0,1].$$

Ekkor integrálva a fenti egyenlőtlenség mindkét oldalát:

$$\int_0^1 (x-x^2)^{n+1}\sin(\pi x)dx \le \int_0^1 (x-x^2)^{n+1}\sin(\pi x)dx. \Rightarrow I_{n+1} \le I_n.$$

b) A paciolális integrálás módszere alapján:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 (x-x^2)\sin(\pi x)dx = -\int_0^1 (x-x^2)\Big(\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\Big)' dx \\
&= -(x-x^2)\Big(\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\Big)\Big|_0^1 + \int_0^1 (1-2x)\Big(\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\Big)dx \\
&= \int_0^1 (1-2x)\Big(\frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}\Big)' dx = (1-2x)\Big(\frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}\Big)\Big|_0^1 - \int_0^1 (-2)\Big(\frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}\Big)dx \\
&= (-2)\frac{\cos(\pi x)}{\pi^3}\Big|_0^1 = \frac{4}{\pi^3}.
\end{aligned}$$

c) A határozott integrálok tulajdonságai alapján:

$$I_n = \int_0^1 (x-x^2)^n \sin(\pi x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (x-x^2)^n \sin(\pi x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x-x^2)^n \sin(\pi x)dx$$

A második integrálban az $x = 1-t$ helyettesítést alkalmazzuk.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{1}{2}} (x-x^2)^n \sin(\pi x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^0 (t-t^2)^n \sin(\pi - \pi t)(-dt) \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} (x-x^2)^n \sin(\pi x)dx + \int_0^{\frac{1}{2}} (t-t^2)^n \sin(\pi t)dt \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{2}} (x-x^2)^n \sin(\pi x)dx.
\end{aligned}$$

d) Legyen $u = x - x^2$, $x \in [0,1]$ innen az következik, hogy $x = \frac{1-\sqrt{1-4u}}{2}$ (Az $f : [0,\frac{1}{4}] \to [0,\frac{1}{2}], f(u) = \frac{1-\sqrt{1-4u}}{2}$ függvény bijektív)). Ekkor $I_n = 2\int_0^{\frac{1}{2}} (x-x^2)^n \sin(\pi x)dx$ integrálban az $x = \frac{1-\sqrt{1-4u}}{2}$. helyettesítést alkalmazzuk, $dx = \frac{1}{\sqrt{1-4u}}du$.

$$I_n = 2\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{u^n}{\sqrt{1-4u}} \sin\Big(\pi\frac{1-\sqrt{1-4u}}{2}\Big)du. \tag{1.1}$$

e) Felhasználva a fenti (1.1) egyenlőtlens eget, kapjuk a következőket:

$$0 \le 4^n I_n = 2^{2n+1}\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{u^n}{\sqrt{1-4u}} \sin\Big(\pi\frac{1-\sqrt{1-4u}}{2}\Big)du \le 2^{2n+1}\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{u^n}{\sqrt{1-4u}}du.$$

Az utolsó integrálban az $u = \frac{1}{4}\sin^2 v$ helyettesítést végezzük el, így megkapva a következőt:

$$0 \le 4^n I_n \le 2^{2n+1}\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{u^n}{\sqrt{1-4u}}du = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} v dv = \pi\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{\pi}{\sqrt{2n+1}}.$$

Tehát

$$0 \le 4^n I_n \le \frac{\pi}{\sqrt{2n+1}},$$

ami a fogótétel alapján pontosan azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to\infty} 4^n I_n = 0.$$