Matematika tétel
2016. április 2.

- **Minden tétel kötelező;**
- **Hivatalból 10 pont szerezhető;**
- **Munkaidő 3 óra;**

I. Rész (50 pont)

1. Határozzuk meg az összes olyan $m \in \mathbb{R}$ valós paramétert, amelyre az $5mx^2 - (2m+1)x - m + 3 = 0$ egyenlet egyik gyöke negatív és a másik pozitív.

2. (a) Igazoljuk, hogy $(1+\sqrt{2})^{100} + (1-\sqrt{2})^{100}$ egy páros természetes szám.

(b) Igazoljuk, hogy $0 < (1-\sqrt{2})^{100} < \frac{1}{100}$.

(c) Az előző két pont felhasználásával bizonyítsuk be, hogy $\left[(1+\sqrt{2})^{100}\right]$ egy páratlan természetes szám, ahol $[a]$ az a szám egészrészét jelöli.

3. Egy tartályt egy csap két óra alatt tölt meg. Egy másik csap ugyanazt a tartályt négy óra alatt tölti meg. Mennyi idő alatt telik meg a tartály, ha mindkét csapon folyik a víz?

4. Egy dobozban 5 fehér és 11 fekete golyó van. Kiveszünk találomra hármat. Mi a valószínűsége, hogy az egyik fehér és a másik kettő fekete?

5. Össze lehet-e állítani 1×1-es és 2×2-es négyzetekből egy nagyobb négyzetet úgy, hogy a felhasznált kétféle négyzet együttes száma 2015?

II. Rész (20 pont)

1. Adott a következő mátrixhalmaz $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\ x, y \in \mathbb{R},\ x > 0 \right\}$.

(a) Igazoljuk, hogy ha $A, B \in G$, akkor $AB \in G$.

(b) Keressünk G-ben két olyan C és D mátrixot, amely esetén $CD \neq DC$.

(c) Ha $A \in G$, akkor bizonyítsuk be, hogy $I_2 - A + A^2 \in G$.

(d) Oldjuk meg G-ben az $\mathbf{X^n} = \begin{pmatrix} 2^n & 2016(2^n-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ egyenletet.

(e) Határozzuk meg $n \in \mathbb{N}$-et ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2016 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

III. Rész (20 pont)

1. Az $(I_n)_{n \geq 1}$ sorozatot az $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2} dx$ képlettel értelmezzük.

(a) Számítsuk ki I_0 értékét.

(b) Számítsuk ki a $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$ határértéket.

Megoldások

I. Rész

1. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $(5m-1)x^2-(2m+1)x-m+3=0$ egyenletnek egyik gyöke negatív és a másik pozitív legyen az, hogy $P=\frac{c}{a}=\frac{3-m}{5m-1}\leq 0$. Innen azt kapjuk, hogy $m\in(-\infty,\frac{1}{5})\cup[3,\infty)$.

2. Felhasználva a *Newton binomiális tételét*:

(a)

$$(1+\sqrt{2})^{100}+(1-\sqrt{2})^{100}=\sum_{k=0}^{100}C_{100}^{k}(\sqrt{2})^k+\sum_{k=0}^{100}C_{100}^{k}(-1)^k(\sqrt{2})^k=2\sum_{k=0}^{50}C_{100}^{2k}2^k=2p$$

(b)

$$0<(1-\sqrt{2})^{100}=\frac{1}{(1+\sqrt{2})^{100}}<\frac{1}{10^{25}}<\frac{1}{100}$$

(c) Világos, hogy

$$(1+\sqrt{2})^{100}=2p-(1-\sqrt{2})^{100}=2p-1+[1-(1-\sqrt{2})^{100}].$$

Figyelembe véve, hogy

$$0<[1-(1-\sqrt{2})^{100}]<1$$

kapjuk, hogy

$$[(1+\sqrt{2})^{100}]=2p-1,$$

ami pontosan a kért állítás.

3. Legyen a tartály térfogata $n\ell$. Az első csapból egy óra alatt $\frac{n}{2}\ell$ víz folyik a második csapon $\frac{n}{4}\ell$. Ha t óra alatt telik meg a tartály a két csapon, az következik, hogy

$$t\cdot\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{4}\right)=n$$

vagyis

$$t=\frac{4}{3}\text{h}.$$

Tehát a tartály egy óra, húsz perc alatt telik meg, ha mind a két csapon folyik a víz.

4. A kedvező esetek száma $C_5^1C_{11}^2$, az összes esetek száma C_{16}^3, amiből az következik, hogy a keresett valószínűség

$$P=\frac{C_5^1C_{11}^2}{C_{16}^3}.$$

5. Tegyük fel, hogy ez megvalósítható. Ekkor legyen d a 2×2 négyzetek száma, $2015-d$ az 1×1 négyzetek száma. Ekkor a területek alapján

$$4d+2015-d=a^2,\quad \text{ahol } a\in\mathbb{N}.$$

Azaz

$$3(d+671)+2=a^2.$$

Ami nem lehetséges, mert négyzetszám 3-mal való osztási maradéka nem lehet 2, ellentmondás. Tehát nem valósítható meg ez a szerkesztés.

II. Rész

1.

(a) Tekintsük az $A=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ és $B=\begin{pmatrix}z & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ mátrixokat. Ekkor világos, hogy

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}xz & xt+y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G.$$

(b) Válasszuk a C, D mátrixokat a következőképpen: $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ekkor

$$CD = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = DC.$$

(c) Világos, hogy

$$A^2 = \begin{pmatrix} x^2 & xy+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát

$$I_2 - A + A^2 = \begin{pmatrix} x^2-x+1 & xy \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G,$$

mivel az $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$.

(d) Felhasználva az eddigi számolásokat

$$A^2 = \begin{pmatrix} x^2 & xy+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ugyanakkor

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} x^2 & xy+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 & x^2y+xy+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A matematikai indukció módszerével belátható, hogy

$$A = \begin{pmatrix} x^n & x^{n-1}y + x^{n-2}y + ... + xy + y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor világos, hogy $x = 2$. Mivel $2^{n-1} + ... + 2 + 1 = 2^n - 1$, ezért $y = 2016$.

(e) Egyszerű számolással belátható, hogy

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Azaz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ... \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát, elgégséges megoldanunk az

$$\frac{n(n+1)}{2} = 2016$$

egyenletet, melynek természetes megoldása 63.

III. Rész

1.

(a) Világos, hogy

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \mathrm{d}x = \frac{2}{3} \mathrm{arctg} \left(\frac{2x+1}{2\sqrt{3}} \right) \bigg|_0^1 = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

(b) Felhasználva, hogy

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x+x^2} \leq x^n, \quad \forall x \in [0,1],$$

világos, hogy

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2} \mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

Ekkor

$$\lim_{n \to \infty} I_n = 0.$$