Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem
Marosvásárhelyi Kar

EMTER verseny
2017. április 8.
Matematika tétel

Hivatalból 10 pont jár. Munkaidő 3 óra.

I. Tétel (30 pont)

1. (6 pont) Rendezzük növekvő sorrendbe a következő számokat:

$$\frac{1}{2},\ \log_{\frac{1}{2}} 8,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^3,\ \sqrt[3]{-\frac{27}{64}}.$$

2. (6 pont) Adott az $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + a\overrightarrow{j}$ és $\overrightarrow{v} = (5+a)\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ vektorok. Határozzuk meg az $a \in \mathbb{R}$ értékét, amelyre az $\overrightarrow{u}$ és $\overrightarrow{v}$ vektorok merőlegesek egymásra.

3. (6 pont) Ha $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ és $\cos x = \frac{2}{3}$ akkor számítsuk ki $\cos(\pi - x)$ értékét.

4. (6 pont) Adottak az $A_n\left(2^n, 3^n\right)$ pontok, $n \in \mathbb{N}$. Határozzuk meg az $A_{2n}A_{2n+2}A_{2n+4}{}_{\Delta}$ háromszög területét!

5. (6 pont) Határozzuk meg az $a \in \mathbb{R}$ értékeit amelyre az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax + 1$, függvény injektív!

II. Tétel (30 pont)

1. (10 pont) Legyen $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Igazoljuk, hogy

$$X^2 - (a+d)X + (ad - bc)I_2 = O_2.$$

2. (5 pont) Ha $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, amelyre $\det(X) = 0$, akkor számítsuk ki X^n mátrixot.

3. (10 pont) Oldjuk meg a következő mátrixegyenletet az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ halmazon:

$$X^n = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

4. (5 pont) Van-e megoldása az $X^n = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ egyenletnek az $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ halmazon, ha $n \geq 2$?

emter

III. Tétel (30 pont)

1. (15 pont) Legyen $f : (-1,1) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, függvény

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - x}{\sqrt{1-x^2} \cdot \left(\arcsin^2 x + x^2\right)}.$$

   (a) (5 pont) Hosszabítsuk meg folytonosan az f függvényt az $x = 0$ pontban.

   (b) (10 pont) Határozzuk meg f primitív függvényeit.

2. (15 pont)

   (a) (5 pont) Tekintsük az $f_\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = x^\alpha - x\alpha + \alpha - 1$, $\alpha \in (0,1)$ függvényt. Számítsuk ki az f_α deriváltját.

   (b) (5 pont) Legyen $\alpha \in (0,1)$. Ekkor igazoljuk, hogy minden $x > 0$ esetén

$$x^\alpha \leq 1 - \alpha + x\alpha.$$

   (c) (5 pont) Bizonyítsuk be, hogy ha $x, y \in (0,1)$ akkor

$$x^y + y^x \leq 2 - 2\sqrt{xy}\,(1 - \sqrt{xy})\,.$$

Megoldások

I. Tétel (30 pont)

1. Egyszerű számítások alapján a következőt kapjuk

$$\log_{\frac{1}{2}} 8 < \sqrt[3]{-\frac{27}{64}} < \left(-\frac{1}{2}\right)^3 < \frac{1}{2}.$$

2. Az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ akkor és csakis akkor merőlegesek egymásra, ha $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, ahol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a skaláris szorzatot jelöli. Tehát a merőlegesség feltétele az, hogy $2 \cdot (5 + a) + a \cdot 2 = 0$. Ebből következik, hogy $a = -\frac{5}{2}$.

3. Ismeretes, hogy $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, tehát a keresett érték $-\frac{2}{3}$.

4. A háromszög területe megadható a következőféleképpen

$$T = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 2^n & 3^n & 1 \\ 2^{n+1} & 3^{n+1} & 1 \\ 2^{n+2} & 3^{n+2} & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} 2^n \cdot 3^n \cdot 60.$$

5. Mivel az f egy polinom függvény, ezért folytonos, tehát akkor és csakis akkor injektív ha monoton. Az f akkor és csakis akkor monoton, ha f' előjeltartó. Mivel f-nek minimuma van, ezért $f'(x) = 3x^2 + a \geq 0$ kell teljesüljön minden $x \in \mathbb{R}$-re. Innen következik, hogy $a \in [0, \infty)$.

II. Tétel (30 pont)

1. Egyszerű számításokkal ellenőrizhető, hogy ha $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, akkor

$$X^2 - (a + d)X + (ad - bc)I_2 = O_2.$$

2. Felhasználva a Cayley Hamilton összefüggést (lásd 1 feladat) azt kapjuk, hogy

$$X^2 = (a + d)X, \;\; X^3 = (a + d)^2 X, \;\; ....,$$

azaz

$$X^n = (a + d)^{n-1} X.$$

3. Vegyük észre, hogy a jobb oldalon szereplő mátrix determinánsa 0. Ekkor felhasználva a 2 feladatot kapjuk, hogy

$$\begin{cases} a(a + d)^{n-1} = 4 \\ b(a + d)^{n-1} = 6 \\ c(a + d)^{n-1} = 8 \\ d(a + d)^{n-1} = 12 \end{cases}$$

Tehát

$$(a+d)^n = 16,\ a+d = 16^{\frac{1}{n}}.$$

Azaz

$$(a+d)^{n-1} = 16^{\frac{n-1}{n}} = k.$$

Ekkor $a = \frac{4}{k},\ b = \frac{6}{k},\ c = \frac{8}{k},\ d = \frac{16}{k}.$

4. Mivel $X^n = (a+d)^{n-1} \cdot X$, ezért azt kapjuk, hogy

$$\begin{cases} a \cdot (a+d)^{n-1} = 3, \\ b \cdot (a+d)^{n-1} = -1 \\ c \cdot (a+d)^{n-1} = 0 \\ d \cdot (a+d)^{n-1} = 0. \end{cases}$$

Az első és az utosó egyenletet összeadva kapjuk, hogy $a \cdot (a+d)^{n-1} + d \cdot (a+d)^{n-1} = (a+d)^n = 3$. Tehát $a + d = \sqrt[n]{3}$, ami viszont nem egy racionális szám ha $n \geq 2$.

III. Tétel (30 pont)

1. (a) A L'Hospital szabály segítségével belátható, hogy

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2}\arcsin x - x}{\sqrt{1-x^2}\left[\arcsin^2 x + x^2\right]} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2}\arcsin x - x}{\sqrt{1-x^2}\left[\arcsin^2 x + x^2\right]} = 0.$$

Ekkor a függvény meghosszabítható az $x = 0$ pontban a következőképpen:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x^2}\arcsin x - x}{\sqrt{1-x^2}\left[\arcsin^2 x + x^2\right]} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

(b) Integráljunk elöszőr a $(0,1)$ intervallumon. Elvégezve az $x = \sin t$ változócserét

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1-x^2}\arcsin x - x}{\sqrt{1-x^2}\left[\arcsin^2 x + x^2\right]} \mathrm{d}x &= \int \frac{t\cos t - \sin t}{\cos t(\sin^2 t + t^2)} \cos t \mathrm{d}t \\ &= \int \frac{t\cos t - \sin t}{\sin^2 t + t^2} \mathrm{d}t \\ &= \int \frac{t(\sin t)' - t' \sin t}{t^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2} \mathrm{d}t \\ &= \int \left(\frac{\sin t}{t}\right)' \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2} \mathrm{d}t \\ &= \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin t}{t}\right). \end{aligned}$$

Ekkor

$$F(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\arcsin x}\right) + c_1 & x \in (0,1) \\ c_2 & x = 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\arcsin x}\right) + c_3 & x \in (-1,0). \end{cases}$$

A folytonossági feltételek alapján $c_1 = c_3 = c_2 - \frac{\pi}{4}$.

2. (a) Világos, hogy az f_α függvény deriválható és deriváltja a következőképpen adható meg:

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha.$$

(b) Felhasználva az előző pontban bevezetett függvényt, az adott egyenlőtlenség a következőre redukálódik:

$$f_\alpha(x) \leq 0.$$

Mivel f_α függvény maximumát az 1 pontban éri el, ezért az igazolandó egyenlőtlenséget kapjuk.

(c) Felhasználjuk az előző két pontban igazolt egyenlőtlenséget (vegyük észre $x, y \in (0,1)$):

$$x^y \leq 1 - y + xy$$

és

$$y^x \leq 1 - x + xy.$$

Összeadva

$$x^y + y^x \leq 2 - (x+y) + 2xy.$$

A számtani és mértani egyenlőtlenség alapján

$$x + y \geq 2\sqrt{xy},$$

azaz

$$x^y + y^x \leq 2 - (x+y) + 2xy \leq 2 - 2\sqrt{xy} + 2xy = 2 - 2\sqrt{xy}(1 - \sqrt{xy}).$$