SAPIENTIA
ERDÉLYI MAGYAR
TUDOMÁNYEGYETEM
Marosvásárhelyi Kar

Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem

EMTER verseny 2021 - Matematika tétel-Megoldások

- **Minden tétel kötelező;**
- **Hivatalból 10 pont szerezhető;**
- **Munkaidő $2\frac{1}{2}$ óra;**

1. (15p) Határozzuk meg az m paraméter értékét, tudva, hogy az

$$x^2 + 2y^2 + 2xy - x + 2y = m$$

egyenletnek egyetlen valós $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ megoldása van.

2. (15p) Oldjuk meg a természetes számok halmazán ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$):

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$$

3. (15p) Az O középpontú egység sugarú körbe beírtuk az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ szabályos hatszöget. Legyen P a hatszög egy tetszőleges belső pontja. Igazoljuk, hogy:

$$\sum_{k=1}^{6} PA_k \geq 6.$$

4. (15p)

   (a) Ha $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ igazoljuk, hogy $A^2 - \operatorname{tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2$, ahol $\operatorname{tr}(A)$ az A mátrix nyoma (a főátlón lévő tagok összege)!

   (b) Ha az $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixra ismert, hogy $\operatorname{tr}(A) = 3$ és $\det(A) = 3$, akkor számítsuk ki $\operatorname{tr}(A^{-1})$ értéket!

   (c) Igazoljuk, hogy nem létezik olyan $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix amelyre $\operatorname{tr}(A) = 0$ és $A^2 + A^t = I_2$.

5. (15p) Adott az $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ függvény.

   (a) Számítsuk ki az f függvény deriváltját!

   (b) Igazoljuk, hogy:

$$2^{\sqrt{3}} < 3^{\sqrt{2}}.$$

6. (15p) Adott az $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln(x+1)$ függvény.

(a) Számítsuk ki az alábbi integrál értékét:

$$\int_1^2 \frac{(3x-2)\, f(x)}{\ln(x+1)} dx = ?$$

(b) Igazoljuk, hogy:

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{4}$$

(c) Számítsuk ki az alábbi határértéket:

$$\lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{t^3} \int_0^t f(x)\, dx \right) = ?$$

Megoldások

1. (15p) Rendezzük az egyenletet x szerint:

$$x^2+(2y-1)x+2y^2+2y-m=0$$

Az egyenletnek akkor lesz egy megoldása, ha $x_1=x_2$, $\quad\Rightarrow \Delta_x=0\Rightarrow$

$$y^2+3y-\frac{4m+1}{4}=0$$

$y_1=y_2 \quad\Rightarrow\quad \Delta_y=9+4m+1=0 \quad\Rightarrow\quad m=-\frac{5}{2}$.
Az egyenlet megoldása $(x,y)=(2,-\frac{3}{2})$.

2. (15p) Felt. $a\le b\le c$ $ab+ac+bc=abc\Rightarrow 3bc\ge ab+ac+bc$ $3bc\ge abc\Rightarrow 3\ge a$. Ha $a=1\Rightarrow b+c+bc=bc\Rightarrow b+c=0$ nincs megoldás. Ha $a=2\Rightarrow 2(b+c)+bc=2bc$ és $2(b+c)=bc$ ami $(b-2)(c-2)=4$. Tehát $b-2=1$ és $c-2=4$ ami $b=3$ és $c=6$ vagy $b-2=2$, $c-2=2\Rightarrow b=c=4$. Ha $a=3\Rightarrow 3(b+c)+bc=3bc$ tehát $3b+3c=2bc$ ami átírva $(2b-3)(2c-3)=9$. Tehát $2b-3=1$ és $2c-3=9$ ami $b=2$ és $c=6$, vagy $2b-3=3$ és $2c-3=3$ amiből $b=c=3$. Ha $a\ge 4$, akkor $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1$.
Megoldások: $(a,b,c)=(2,3,6),(2,4,4),(3,3,3)$.

3. (15p) Az A_1 és A_4, A_2 és A_5 valamint A_3 és A_6 átmérősen ellentett pontok, így felírható, hogy

$$PA_1+PA_4\ge A_1A_4=2,\ \ PA_2+PA_5\ge A_2A_5=2\ \ PA_3+PA_6\ge A_3A_6=2.$$

Ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva következik, hogy

$$\sum_{k=1}^{6}PA_k\ge 6.$$

4. (15p)

   (a) Cayley-Hamilton, ellenőrzés

   (b) Beszorozzuk a C-H $A^{-1}\Rightarrow$

   $$3A^{-1}=3I_2-A,$$

   ahonnan $\operatorname{tr}(A^{-1})=\operatorname{tr}(I_2)-\frac{1}{3}\operatorname{tr}(A)=1$ (direkt számítással is elvégezhető)

   (c) C-H $\Rightarrow A^t=(1+\det(A))\cdot I_2$ ahonnan $\det(A^t)=\det((1+\det(A))\cdot I_2)$, vagyis $\det(A)=1+\det(A)$,tehát ilyen mátrix nem létezik

5. (15p)

   (a) $f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$

   (b) A $[2,3]\ni x$ intervallumon f növekvő ($f'(x)>0$), tehát $f(2)<f(3)$, ahonnan $2^{\sqrt{3}}<3^{\sqrt{2}}$

6. (15p)

   (a) $I=4$

   (b) Változócsere $\ln(x+1)=:t$ ...

   (c) l'Hospital $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^3}\int_0^t f(x)\,dx\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t\ln(t+1)}{3t^2}\right)=0$.