SAPIENTIA
ERDÉLYI MAGYAR
TUDOMÁNYEGYETEM
Marosvásárhelyi Kar

Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem
EMTER verseny 2022 - Matematika tétel-Megoldások

- **Minden tétel kötelező;**
- **Hivatalból 10 pont szerezhető;**
- **Munkaidő 3 óra;**

I. Rész (30 pont)

1. Mennyi az $a = \frac{5}{7}$ szám 2022. tizedes számjegye?

   Megoldás. $\frac{5}{7} = 0.7142857142\ldots$ a tizedesjegyek hatosával ismétlődnek, tehát a 2022. tizedesjegye 5.

2. Határozd meg az x valós számot, ha $7, 2x, x^2+9$ egy számtani haladvány egymás utáni tagjai!

   Megoldás. Nem létezik ilyen haladvány, mert $\frac{7+\left(x^2+9\right)}{2} = 2x$, egyenletnek nincs valós megoldása.

3. Határozd meg az m pozitív valós számot, amelyre az $x = 5$ egyenes az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f\left(x\right) = -x^2 + \left(m^2 - 6\right)x + 4$ függvény grafikus képének a szimmetriatengelye!

   Megoldás. $-\frac{b}{2a} = 5$, tehát $m = 4$.

4. Oldd meg a valós számok halmazán a $25^x - 2 \cdot 15^x + 9^x = 0$ egyenletet!

   Megoldás. Az egyenlet átírva $\left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 2\left(\frac{5}{3}\right)^x + 1 = 0$, aminek megoldása: $\left(\frac{5}{3}\right) = 1$, vagyis $x = 0$.

5. Adottak az $A\left(3,4\right), B\left(-1,2\right)$ pontok. Határozd meg a $[AB]$ felezőmerőleges egyenletét!

   Megoldás. Az AB szakasz középpontjának a koordinátái $C\left(1,3\right)$ és $m_{AB} = \frac{1}{2}$. Tehát a felezőmerőleges meredeksége -2, és az egyenlete: $y - 4 = -2\left(x-3\right) \Leftrightarrow 2x + y = 10$.

6. Az egységsugarú körbe beírt ABC háromszögre teljesül az alábbi feltétel:

   $$\sin\left(A\right) + \sin\left(B\right) + \sin\left(C\right) = \frac{3}{2}.$$

   Számítsd ki a háromszög kerületét!

   Megoldás. A szinusz tételből $\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} = 2R$ következik, hogy $\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} = \frac{3}{2}$, ahonnan a kerület $a + b + c = 3$.

II. Rész (30 pont)

1. Adott az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ a & i & a \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix}$$

mátrix, ahol i a komplex egység ($i^2 = -1$) és a egy valós szám.

(a) Számítsd ki a $\det A(0)$ determinánst!

Megoldás. $\det A(0) = i$.

(b) Igazold, hogy bármely a valós szám esetén $A(a)$ invertálható!

Megoldás. $\det A(a) = a^2 + i \neq 0$, tehát A invertálható.

(c) Számítsd ki az $A(0)^{2022}$ mátrixot!

Megoldás. $A\left(0\right)^2 = -I_3$, tehát $A\left(0\right)^{2022} = -I_3$.

2. A valós számok halmazán értelmezzük az asszociatív és semleges elemes műveletet a következőképpen:

$$x \circ y = xy - 6x - 6y + 42.$$

(a) Igazold, hogy $x \circ y = (x-6)(y-6) + 6$, bármely x, y esetén.

Megoldás. Ellenőrzés.

(b) Határozd meg azon egész számokat melyek inverze, a $\circ$ műveletre nézve, is egész szám.

Megoldás. A semleges eleme a 7, tehát egy általános x inverze egyenlő $\left(6 + \frac{1}{x-6}\right)$-al. Ebből következik, hogy 6 nem invertálható, illetve az 5 és 7 az egyedüli egész számok melyek inverzei is egészek.

(c) Számítsd ki a $\frac{2022}{1} \circ \frac{2022}{2} \circ \ldots \circ \frac{2022}{2022}$ értéket!

Megoldás. Észrevehető, hogy bármely x esetén $x \circ 6 = 6 = 6 \circ x$, illetve, hogy $\frac{2022}{337} = 6$. Felhasználva a művelet asszociativitását ezekből következik, hogy

$$\left(\frac{2022}{1} \circ \frac{2022}{2} \circ \ldots \circ \frac{2022}{336}\right) \circ \frac{2022}{337} \circ \left(\frac{2022}{338} \circ \ldots \circ \frac{2022}{2022}\right) = x \circ 6 \circ y = 6 \circ y = 6.$$

III. Rész (30 pont)

Adott az integrál:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{4n+2}}{1+x^2} dx.$$

1. Számítsd ki I_0-t!

Megoldás. $I_0 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^2} dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = 1 - \arctan\left(x\right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$

2. Igazold, hogy

$$\frac{x^{4n+4}}{\left(1+x^2\right)^2} \leq \frac{x^{4n+2}}{1+x^2} \leq x^{4n+2},\ \forall x \in \left[0, 1\right].$$

Megoldás. Ellenőrzés.

3. Számítsd ki a határértéket:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{x^{4n+2}}{1+x^2}dx.$$

Megoldás.

$$0 \le \int\limits_0^1 \frac{x^{4n+2}}{1+x^2}dx \le \int\limits_0^1 x^{4n+2}dx = \frac{1}{4n+3} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

4. A parciális integrálás segítségével igazold, hogy

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{4n+2}}{1+x^2}dx = \frac{1}{2\,(4n+3)} + \frac{2}{4n+3}\int\limits_0^1 \frac{x^{4n+4}}{\left(1+x^2\right)^2}dx.$$

Megoldás.

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{4n+2}}{1+x^2}dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{x^{4n+3}}{4n+3}\right)' \frac{1}{1+x^2}dx = \left(\frac{x^{4n+3}}{4n+3}\right)\frac{1}{1+x^2}\Big|_0^1 -$$

$$-\int\limits_0^1 \frac{x^{4n+3}}{4n+3}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' dx = \frac{1}{2\,(4n+3)} + \frac{2}{4n+3}\int\limits_0^1 \frac{x^{4n+4}}{\left(1+x^2\right)^2}dx.$$

5. Igazold, hogy

$$\lim_{n\to\infty} n\int\limits_0^1 \frac{x^{4n+2}}{1+x^2}dx = \frac{1}{8}.$$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} n\int\limits_0^1 \frac{x^{4n+2}}{1+x^2}dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2\,(4n+3)} + \frac{2n}{4n+3}\int\limits_0^1 \frac{x^{4n+4}}{\left(1+x^2\right)^2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{8} + 0,$$

mert

$$0 \le \int\limits_0^1 \frac{x^{4n+4}}{\left(1+x^2\right)^2}dx \le \int\limits_0^1 \frac{x^{4n+2}}{1+x^2}dx \le \int\limits_0^1 x^{4n+2}dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$