SAPIENTIA
ERDÉLYI MAGYAR
TUDOMÁNYEGYETEM
Marosvásárhelyi Kar

Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem

EMTER verseny 2023 - Matematika tétel

- **Minden tétel kötelező;**
- **Hivatalból 10 pont szerezhető;**
- **Munkaidő 3 óra;**

I. Rész (30 pont)

1. Adottak az $A(-3,5)$, $B(2,4)$ pontok.

   (a) Számítsd ki az A pont B-re vonatkozó szimmetrikusának koordinátáit!

   Megoldás. Ha $C(x_C, y_C)$ a keresett pont, akkor $x_B = \frac{x_A+x_C}{2}, y_B = \frac{y_A+y_C}{2}$ ahonnan $C(7,3)$

   (b) Számítsd ki az AB egyenes meredekségét (iránytényezőjét)!

   Megoldás. $m_{AB} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = -\frac{1}{5}$

   (c) Számítsd ki az AOB háromszög kerületét!

   Megoldás. $AB = d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{26}$. $\text{Ker}_{ABC} = \sqrt{26} + \sqrt{34} + \sqrt{20}$

   (d) Igazold, hogy $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{v}$,ahol $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} + 10\overrightarrow{j}$.

   Megoldás. $\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, ahonnan $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{v} = 5 \cdot 2 + 10 \cdot (-1) = 0$, vagyis $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{v}$

2. Oldd meg a valós számok halmazán a $9^x + 18 = 11 \cdot 3^x$ egyenletet!

   Megoldás. $3^x = t$, tehát $t^2 - 11t + 18 = 0$, $t_1 = 9$, $t_2 = 2$. $\Rightarrow 3^x = 9$,$x_1 = 2$ és $3^x = 2$, $x_2 = \log_3 2$

   iugnvrugyvnwoiuy

3. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy ha $n \in \{1,2,3,4,5\}$, akkor $3^n + 4^n > 5^n$.

   Megoldás. $\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1 > \left(\frac{5}{4}\right)^n$ a baloldalon lévő függvény csökkenő, míg a jobboldalon növekvő, és $n = 2$.-re fennáll az egyenlőség. Tehát az egyetlen megoldása az egyenlőtlenségnek $n = 1 \Rightarrow P = \frac{1}{5}$

4. Számítsd ki az $x \in (0, \pi)$, értékét ha

$$\sin(2x) + 6\cos(x) - \sin(x) - 3 = 0.$$

Megoldás. $2\sin(x)\cos(x) + 6\cos(x) - \sin(x) - 3 = (\sin x + 3)(2\cos x - 1)$ ahonnan $\cos x = \frac{1}{2}$ és $x = \frac{\pi}{3}$

II. Rész (30 pont)

1. Adottak a mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

és az $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X) = AX - XA$ függvény.

(a) Számítsd ki az A mátrix determinánsát és rangját!

Megoldás. $\det A = 1$, $\text{rang}A = 2$

(b) Számítsd ki $f(I_2)$ és $f(O_2)$ mátrixokat!

Megoldás. $f(I_2) = f(O_2) = O_2$

(c) Igazold, hogy $f(aX) = af(X)$, $\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ és $\forall a \in \mathbb{R}$!

Megoldás. Ellenőrzés.

(d) Igazold, hogy $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$, $\forall X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$!

Megoldás. Ellenőrzés.

(e) Igazold, hogy f nem injektív és nem szürjektív!

Megoldás. $I_2 \neq O_2$ de $f(I_2) = f(O_2)$, tehát f nem injektív. Az $f(X) = AX - XA$ mátrix nyoma: $\text{Tr}(AX - XA) = 0$, tehát az I_2 mátrixot nem lehet előállítani $\Rightarrow f$ nem szürjektív.

(f) Igazold, hogy $f(X) + f(Y) \neq I_2$, $\forall X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$!

Megoldás. $f(X) + f(Y) = f(X+Y)$ és az (e) alpontból következik, hogy $\neq I_2$.

III. Rész (30 pont)

Adott az $f : [0, \infty) \to R$, $f(x) = \frac{2x}{1+x}$ függvény és értelmezzük az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozatot: $a_{n+1} = f(a_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 = 2$.

1. Számítsd ki $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$ és tanulmányozd az f monotonitását!

   Megoldás. $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$ tehát f mon. növekvő $\forall x \in (0, \infty)$

2. Igazold, hogy $f(x) \leq \sqrt{x}$, $\forall x \in [0, \infty)$.

   Megoldás. Az egyenlőtlenség ekvivalens $2\sqrt{x} < x + 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 > 0$, $\forall x \in [0, \infty)$

3. Igazold, hogy $\int_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{2}{3}$.

   Megoldás. Az előbbi alpontból $\int_0^1 f(x)\,dx \leq \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} |_0^1 = \frac{2}{3}$

4. Add meg az (a_n) sorozat első négy tagját!

Megoldás. $a_1 = 2$, $a_2 = f(a_1) = \frac{4}{3}$, $a_3 = f(a_2) = \frac{8}{7}$, $a_4 = f(a_3) = \frac{16}{15}$

5. Igazold, hogy (a_n) monoton csökkenő!

   Megoldás. Indukció $1 < a_n \leq 2$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{a_n+1} < \frac{2}{2} = 1$ tehát (a_n) mon. csökkenő.

6. Igazold, hogy $a_n = \frac{2^n}{2^n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$és számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ határértéket!

   Megoldás. Indukció. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$=1