emter

# MATEMATIKA - mintatétel
# 2015

## I. Rész (30p)

(5p) **1.** Oldd meg a $2x^2 - 5x - 12 < 0$ egyenlőtlenséget az egész számok halmazán!

(5p) **2.** Határozd meg $m \in \mathbf{R}$ értékét úgy, hogy az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ , $f(x) = x^2 - 4x - m + 3$ függvény minimuma -8 legyen!

(5p) **3.** Határozd meg, hogy a $\mathbf{d}_1 : 2x - y - 2 = 0$ , $\mathbf{d}_2 : x + 3y - 8 = 0$ és
$\mathbf{d}_3 : -5x + 13y + 68 = 0$ egyenesek által meghatározott háromszög súlypontja melyik csúcsponthoz van a legközelebb!

(5p) **4.** Oldd meg a $\log_3(2x - 1) + \log_3(x + 2) = 1$ egyenletet!

(5p) **5.** Határozd meg $n \in \mathbf{N}$ , $n \geq 2$ értékét, ha $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 16$!

(5p) **6.** Egy 10 méter élű kocka alakú teremben repked 1001 lepke. Igazold, hogy mindig található két olyan lepke, melyek közötti távolság kisebb, mint 2 méter!

## II. Rész (30p)

**1.** Adott a következő lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{cases} x + my - 2z = 2 \\ 2x + (2m-1)y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

(6p) a) Ha m $= 2$ számítsd ki $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}$, ahol $\mathbf{A}$ az egyenletrendszer mátrixa!
(6p) b) Határozd meg $m \in \mathbf{R}$ értékét úgy, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix invertálható legyen!
(6p) c) $m = 3$ esetén oldd meg az egyenletrendszert!

**2.**
(6p) a) Igazold, hogy

$$\det(A+B) + \det(A-B) = 2(\det(A) + \det(B))$$

,
$\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ esetén!
(6p) b) Igazold, hogy $\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ esetén fenáll a következő egyenlőtlenség:

$$\det(A^2 + B^2) \geq \det(AB - BA)!$$

III. Rész (30p)

**1.** Minden $n$ természetes szám esetén legyen

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}dx, J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

(6p) a) Számítsd ki, $I_0, I_1, J_1$ értékeket!
(6p) b) Igazold, hogy bármely $n$ nullától különböző természetes szám esetén

$$J_{2n} - J_{2n+2} = I_{2n}!$$

**2.** Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ függvény.
(6p) a) Számítsd ki $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{f(x)}$ határértéket!
(6p) b) Tanulmányozd az $f$ függvény konvexitását!
(6p) c) Igazold, hogy a $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(\sqrt{x})$ függvény szigorúan csökkenő a $(0, +\infty)$ intervallumon!